自己重力ポアソン方程式の数値計算(基研短期研究会「自己重力多体系における非線形・非平衡現象」報告,研究会報告)

伊藤, 健一郎; 相澤, 洋二

自己重力ポアソン方程式の数値計算

早大理工　伊藤健一郎、相澤洋二

1 モデル

エネルギー h をもつ粒子が、ポテンシャル $\phi(r)$ 内を運動するとき、十分な時間経過後、位置 r にその粒子の見出される確率 $p(r)dr$ は、

$$p(r)dr \propto [\int\int\int \delta(h - \frac{1}{2}v^2 - \phi(r))dv^3]dr \propto (h - \phi(r))^{1/2}dr$$

で表される。さらに、粒子のエネルギー分布関数を $\rho(h)$ とすると、球対称ポアソン方程式は以下のようになる。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} \overset{\propto}{=} n(r) = \int_{\phi(r)}^{0} (h - \phi(r))^{1/2}\rho(h)dh$$

本研究では $\rho(h)$ の関数形を与えたときの方程式の解を数値的に詳しく調べた。初期条件は $r = 0$ で $\phi(0) = -1.0, \frac{d\phi(0)}{dr} = 0.0$ とした。

2 結果

(1) $\rho(h) = (-h)^{n-\frac{3}{2}}$ の場合

このとき、(1.1) 式は Lane-Emden 方程式と等価になる。この方程式は、

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = (-\phi(r))^n$$

で表され、解の振る舞いが解析的に調べられている。それによると、$n < 5$ のとき解は有限の半径 r で零点をもち、$n \geq 5$ のとき $r \to \infty$ で $\phi(r) \to 0$ に漸近する。ただし $n = 5$ のとき系の全質量は有限であり、$n > 5$ では無限の質量をもつ。今回の計算でも同じ結果が得られたが、とくに $n \geq 5$ の場合の $r \gg 1$ の領域で、解がベキで近似できるかどうかを調べてみた。すると n の値が 5 に近い値では非常にベキに収束しにくく、5 よりある程度大きな値では $r \gg 1$ でベキ近似が成り立つという結果を得た。(図 1 参照) ($n = 5$ の時は厳密解が存在し、$r \gg 1$ で $\phi \sim r^{-1}$ である。)

(2) $\rho(h) = (-h)^{n-\frac{3}{2}} \cdot e^{-h}$ の場合

(1) のエネルギー分布に e^{-h} を掛け、同様に n をパラメータとして調べた。やはり $n < 5$ では有限の r で零点を持ち、$n \geq 5$ で無限遠まで延びるような結果を得たが、厳密に $n = 5$ が境界となっているかはさらに調べてみる必要がある。(1) と異なり、$n = 5$ のときでも非常にベキに収束しにくいという結果を得た。(図 2 参照) 従って、(1) との類推から、$n = 5$ より少し小さな値でベキとなる解が存在するかもしれないが、今回の計算ではそのような結果は得られなかった。

(3) $\rho(h) = (-h)^{5-\frac{3}{2}} \cdot e^{-ah}$ の場合

(2) のパラメータ n を 5 に固定し、exp の指数 a をパラメータとして調べた。まず、$a > 0$ としてパラメータの値を大きくしてゆくと、a の値が大きいほど良くベキに近似できるという結果が得られた。$a \geq 7$ での数密度 $n(r)$ の指数は-2.5 程度である。(図 3 参照)

さらに a の値を負にして計算を進めた。(a は-1 から-10 までの整数値) すると、全ての a に対して有限の半径で $\phi = 0$ となる結果が得られた。$\rho(h)$ の項の中に $(-h)^{5-\frac{3}{2}}$ より低次の項がないにもかかわらず解が有限の r で 0 となる結果が得られたことは興味深い。ま

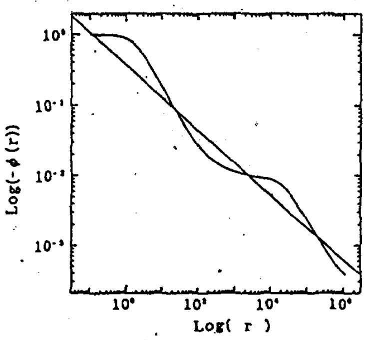
た、今回は $r=0$ での初期値 $\phi(0)$ の値を固定して計算したが、この値もパラメータとして扱う必要がある。今後計算を進めて定量的な結果を出してゆきたい。

参考文献

Binney and Tremaine, Galactic Dynamics(1987), princeton

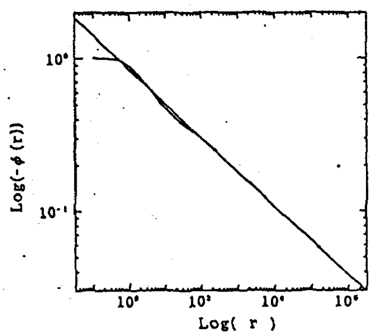
K.F.Ogorodnikov, Dynamics of Stellar Systems(1965), PERGAMON PRESS

(a)



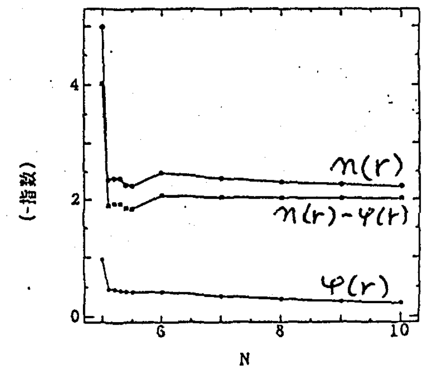
ポテンシャル(EMDEN解、a = 5.1)

(b)



ポテンシャル(EMDEN解、n = 10)

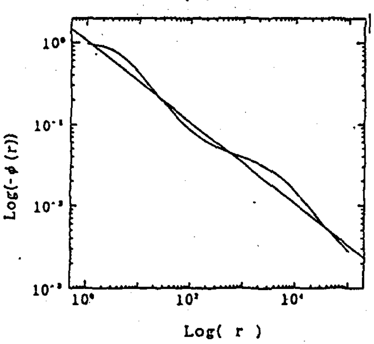
(c)



べキ近似の指数(EMDEN解)

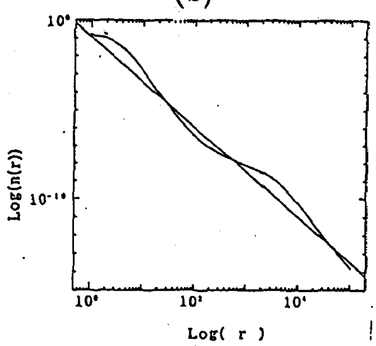
図 1

(a)



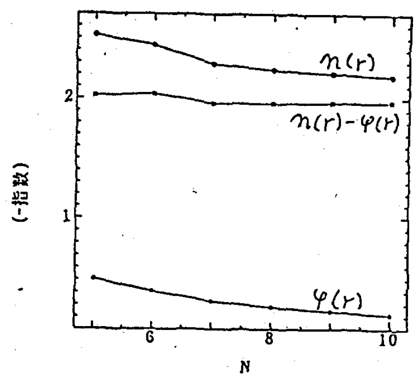
ポテンシャル(a = 1.0,N = 5)

(b)



密度 (a = 1.0,N = 5)

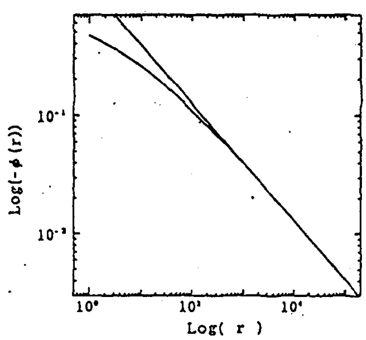
(c)



べキ近似の指数(a = 1.0)

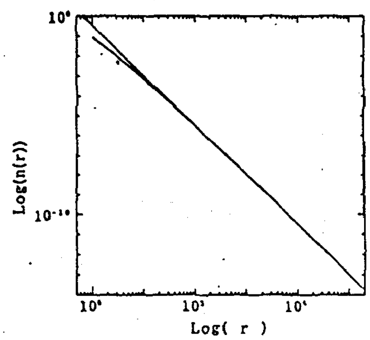
図 2

(a)



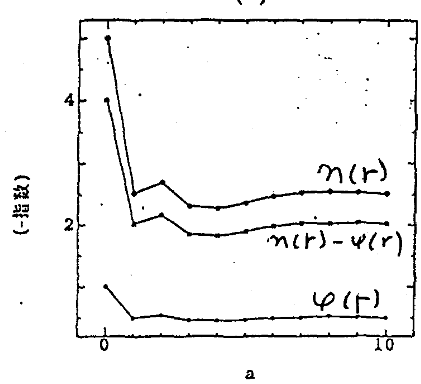
ポテンシャル(a = 10.0,N = 5)

(b)



密度(a = 10.0,N = 5)

(c)



べキ近似の指数(N = 5)

図 3